INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

Association d'éducation
Organisme d'intérêt général à caractere éducatif
Etablissement libre d'enseignement supérieur

MATHÉMATIQUES II

(Toutes options)

DURÉE : 3 heures – COEFFICIENT : 4
COEFFICIENT : 5 (réservé au BAC technique)

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

L'ÉPREUVE SE COMPOSE DE TROIS EXERCICES INDÉPENDANTS

EXERCICE I

X est une variable aléatoire absolument continue suivant une loi uniforme sur l'intervalle $\left[-\pi/2, \pi/2 \right]$.

1°) a) Quelle est la densité de probabilité de X.
b) X admet-elle une espérance ? Si oui quelle est sa valeur ?
c) X admet-elle une variance ? Si oui quelle est sa valeur ?

2°) On pose $Y = X^2$. Mêmes questions a), b), c) qu'en 1°) pour la variable aléatoire Y.

3°) On pose $Z = \operatorname{tg} X$. Mêmes questions a), b), c) qu'en 1°) pour la variable aléatoire Z.

EXERCICE II

p et q désignent deux réels vérifiant : $0 < p < 1$, $p + q = 1$.
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi commune est définie par :

$$P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$$

On définit les deux variables aléatoires U et V par :

$$U = \sup(X,Y) \qquad V = \inf(X,Y)$$

1°) Quelle est la loi conjointe de U et V, c'est-à-dire préciser, pour tout couple d'entiers (m, n), la probabilité de l'évenement :

$$U = m \text{ et } V = n$$

2°) Expliciter les lois marginales de U et V.

3°) U et V sont-elles indépendantes ?

4°) Quelle est la loi de U + V ?

EXERCICE III

On rappelle que, pour $|a| < 1$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \dfrac{1}{1-a}$

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

Les cœfficients du binôme seront notés de facon usuelle :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

I désignera l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n+1.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Établir : $\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p = 2^n$

NOTATIONS

On donne dans un espace probabilisé deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans l'ensemble I.
Pour tout $(i, j) \in I^2$ on pose :

$a_{ij} = P\left[X=j \text{ et } Y=i \right]$

et

$b_{ij} = P\left[Y=i \,/\, X=j \right]$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de l'événement Y=i, sachant que X=j.

Enfin B désignera la matrice carrée d'ordre n+1 dont le terme général d'indice i,j est b_{ij}.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie on suppose qu'il existe k tel que :

$$\forall (i,j) \in I^2 \qquad a_{ij} = k\, C_n^{i-1}\, C_n^{j-1}$$

1°) Montrer que $k = 1/2^{2n}$

2°) Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?

3°) X et Y sont-elles indépendantes ?

4°) a) Reconnaître la loi de Z = X–1
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

5°) a) Quels sont les éléments de la matrice B ?
b) Calculer B^p pour tout entier p.
c) Quelles sont les valeurs propres de B ?

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie a_{ij} vaut k' lorsque $\left| i+j-n-2 \right| = 1$ et 0 sinon.

1°) En dénombrant le nombre de couples (i,j) tels que $\left| i+j-n-2 \right| = 1$ calculer k'.

2°) Quelle est la loi de X ; de Y ?

3°) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4°) Calculer les éléments de la matrice B. Écrire très clairement cette matrice.

5°) Dans cette question n= 4. En résolvant un système, montrer que 1 est valeur propre de B et trouver les vecteurs propres correspondants. Trouver les autres valeurs propres.

6°) On revient au cas général. Montrer que 1 est valeur propre de B. (On pourra chercher un vecteur propre évident en s'aidant d'une interprétation probabiliste).

• • •